CRISTIAN MAZZONI

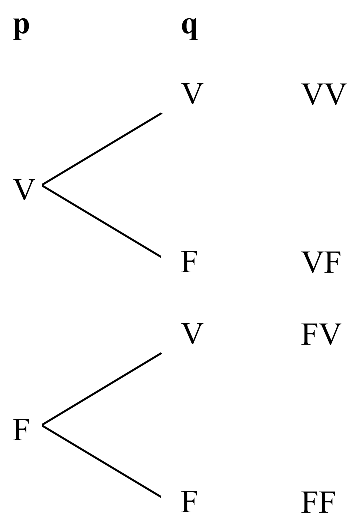
Logica antica. Stoici

[Nota. La ri-lettura della Logica stoica qui tentata è realizzata a partire dalle tesi della moderna Logistica (XX secolo). L'illustrazione della Logica stoica è quindi svolta secondo una terminologia e dei concetti di matrice Logistica, in se stessi non direttamente esplicitati dagli Stoici. Tale illustrazione vuole, perciò, essere al contempo un'illustrazione della Logica stoica e del calcolo proposizionale quale definito entro la Logistica.]

Esposizione problematica.

Prendiamo una proposizione del tipo "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora" o "se mangi la minestra, poi ti do il gelato". Queste proposizioni sono della forma "se….., allora….." ed, in Logica, vengono dette "**implicazioni"**: la prima delle due proposizioni che compongono l'implicazione è detta "antecedente" e la seconda "conseguente" (così in "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora", "l'acqua è portata a cento gradi" è l'antecedente e "l'acqua evapora" è la conseguente). In un'implicazione si dice anche che l'antecedente implica la conseguente. Possiamo scrivere un'implicazione, in forma simbolica, come $p \rightarrow q$, dove "p" è la proposizione antecedente e "q" la conseguente.
Domandiamoci: che significa la proposizione "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora?".
Risposta: significa che, posto che io porti l'acqua a 100 gradi, essa evaporerà. In altri termini: il significato della proposizione è che, se si verifica un certo stato di cose, se ne verificherà anche un altro (se e quando il figlio mangerà la minestra, allora la madre gli darà il gelato; allorché l'acqua sarà scaldata sino a raggiungere i 100 gradi, allora comincerà ad evaporare, etc.). L'implicativa, detto in modo formale, significa: ogni qual volta l'antecedente è vera, allora anche la conseguente è vera.
Un'implicativa sarà, perciò, falsa, se accade che l'antecedente sia vera, senza che pure la conseguente sia vera: così, se porto l'acqua a 100 gradi ed essa non evapora, l'implicativa "se l'acqua è portata a cento gradi, evapora", è falsa, così pure la madre diceva il falso se, dopo che il figlio ha mangiato la minestra, questi non riceve il gelato che gli era stato promesso come premio.
Ora, rispetto ad un'implicativa del tipo "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora" non è affatto possibile decidere *a priori* (ossia a prescindere da un riscontro reale) se essa sia vera o falsa: si tratterà di verificare empiricamente se, riscaldando l'acqua sino alla temperatura di 100 gradi, questa cominci o meno ad evaporare.
Tuttavia, supponiamo quest'altra proposizione implicativa: "se è vero che l'acqua portata a 100 gradi evapora ed io porto l'acqua a 100 gradi, essa evaporerà". Possiamo scriverla in forma simbolizzata come $((p \rightarrow q) \text{ e } p) \rightarrow q$, dove "p" sta per "l'acqua è portata a 100 gradi", "q" per "essa evapora", "$\rightarrow$" per "implica". Quest'implicazione non ci dice nulla circa la verità o meno dell'altra implicazione "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora", ma ci dice che, se è vero che l'acqua portata a 100 gradi evapora, ed è vero che io porto l'acqua a 100 gradi, allora questa dovrà evaporare. L'implicazione "se è vero che l'acqua portata a 100 gradi evapora ed io porto l'acqua a 100 gradi, essa evaporerà" è sempre vera indipendentemente da che sia vero o meno che l'acqua portata a 100 gradi evapora, ossia sarebbe comunque vera anche nel caso che l'acqua, portata a 100 gradi, non evaporasse: l'essersi avveduti di questa circostanza è il merito fondamentale degli Stoici in campo logico.
Domandiamoci: qual è la differenza fra una proposizione del tipo "se l'acqua è portata a 100 gradi, evapora" e "se è vero che l'acqua portata a 100 gradi evapora ed io porto l'acqua a 100 gradi, allora

essa evaporerà”? Detto formalmente: qual è la differenza fra una proposizione del tipo “p → q” e una del tipo “((p → q) e p) → q”?
La differenza è che la verità della prima può essere decisa soltanto *a posteriori*, ossia dopo una disamina del reale, la verità della seconda, invece, può essere decisa *a priori* (ossia indipendentemente da ogni disamina del reale), ed *a priori* è possibile sostenere che la seconda proposizione è sempre vera.
Si domanderà ancora: perché *a priori* è possibile sostenere che la proposizione ((p → q) e p) → q è sempre vera?
Risposta: per il significato da noi attribuito al connettivo “se …. allora”.
Un’implicazione è infatti falsa soltanto in un caso: con antecedente vera e conseguente falsa. Ora, se è possibile dimostrare che non potrà mai darsi questo caso per l’implicazione ((p → q) e p) → q, avremmo con ciò dimostrato che questa implicazione è sempre vera.
Come procedere nella dimostrazione?
Iniziamo col notare che, per ogni proposizione, si danno solo due valori di verità: vera o falsa. Questo significa che, dal momento che l’implicazione presa in esame risulta dall’unione di due proposizioni (p e q) mediante i connettivi logici “se…., allora…” ed “e”, si daranno, per le due proposizioni p e q, le seguenti combinazioni possibili di valori di verità:



Secondariamente, notiamo come sia possibile intendere il connettivo logico “se….., allora……”, presente entro una qualsiasi proposizione implicativa del tipo “p → q”, come una funzione, la quale associ ad ogni valore di verità di p e q, un certo valore di verità a p → q. Infatti, s’era detto, il significato della proposizione “se l’acqua è portata a 100 gradi, essa evapora” consiste nell’escludere la possibilità che, portata l’acqua a 100 gradi, questa non evapori, ossia che sia vera l’antecedente, senza che sia vera anche la conseguente: se, perciò, dovesse verificarsi questa ipotesi, l’implicazione “se l’acqua è portata a 100 gradi, essa evapora”, sarà da ritenersi falsa.
La cosa, formalizzata, si riduce ad affermare che, per il valore di verità V = vero di p e F = falso di q, il valore di verità di p → q risulterà F = falso; per tutti gli altri valori di verità di p e q, p → q risulterà invece sempre V = vero.
Sarà, perciò:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La medesima cosa vale per il connettivo “e”.
Domandiamoci: se uno mi dice “Marco è figlio di Maria e Aldo è figlio di Anna”, che cosa intendo? Risposta: che ambedue le proposizioni sono vere, ossia sia che Marco è figlio di Maria, sia che Aldo è figlio di Anna. Intendo, cioè, che sono esclusi gli altri tre casi: 1) che la prima è vera e la seconda falsa, 2) che ambedue sono false e 3) che la seconda è vera e la prima falsa. Se poi mi capitasse, ad esempio, di scoprire che, pur essendo Marco figlio di Maria, Aldo è figlio di Stefania e non di Anna, riterrei senz’altro la proposizione “Marco è figlio di Maria e Aldo è figlio di Anna” falsa.
Il significato del connettivo logico “e” (detto anche “**congiunzione**”), entro la proposizione p e q, consiste, dunque, nell’escludere la possibilità che p e q siano ambedue false o soltanto una delle due vera: se così non fosse, la congiunzione p e q risulterebbe falsa.
E’ quindi possibile concepire anche il connettivo “e”, entro la proposizione p e q, come una funzione che associa un certo valore di verità a p e q, in corrispondenza del valore di verità assunto dalla proposizione p e dalla proposizione q.
La tavola di verità per la congiunzione sarà la seguente:

p	q	p e q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tornando alla nostra implicazione di partenza, cioè $((p \rightarrow q)$ e $p) \rightarrow q$, è ora possibile calcolarne il valore di verità per ogni possibile valore di verità delle sue proposizioni atomiche costituenti (cioè la proposizione p e la proposizione q). Sarà, infatti:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q)$ e p	$((p \rightarrow q)$ e $p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Si può immediatamente notare come non si dia mai il caso di ((p → q) e p) = V e q = F, ossia di antecedente vera e conseguente falsa: ciò equivale a dire che l'implicazione ((p → q) e p) → q è sempre vera.
Ora, ricordando che un ragionamento è un'implicazione fra una o più proposizioni, poste come premesse, e un'altra, posta come conclusione, si riconoscerà come la proposizione ((p → q) e p) → q è un ragionamento a tutti gli effetti, con questa caratteristica, però: che la sua verità può essere decisa mediante un semplice **calcolo**, indipendentemente da ogni riferimento alla realtà.
Per gli Stoici si tratta di rinvenire tutte le possibili implicazioni di questo tipo, ossia tali per cui il loro valore di verità risulta sempre V per ogni valore di verità delle proposizioni atomiche costituenti.
Una di queste implicazioni l'abbiamo già rinvenuta, ed è la proposizione ((p → q) e p) → q, che gli Stoici enunciano nella forma *Se il primo, il secondo, ma il primo, allora il secondo*, dove "primo" sta per la proposizione p e "secondo" per la proposizione q.

Supponiamo un ulteriore caso. Supponiamo una madre dica al figlio, parlando del pranzo: "Oggi o faccio il primo o faccio il secondo". Il figlio intenderà che non potranno darsi i due casi assieme, ossia che la madre faccia sia primo, sia secondo, così come intenderà che neppure potrà darsi il caso che non faccia né primo, né secondo.
La **disgiunzione** "o" è intesa cioè in senso **esclusivo** (l'*aut* latino).
Essa, come tutti i connettivi logici, è una funzione di verità che associa un certo valore di verità alla proposizione disgiuntiva p o q, a seconda del valore di verità delle proposizioni componenti (la proposizione p e la proposizione q).

p	**q**	**p o q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se il connettivo "o" fosse stato inteso in senso **inclusivo** (come il *vel* latino), la tavola di verità sarebbe, invece, la seguente:

p	**q**	**p o q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ora, *a priori* il figlio non può sapere se la madre gli ha detto o meno la verità: si tratterà di verificare, venuta l'ora del pranzo, se ella avrà fatto o solo primo, o solo secondo, come aveva detto, o se, viceversa, avrà fatto primo e secondo o nessuno dei due. *A priori*, tuttavia, egli sa con certezza che, se è vero quello che gli è stato detto, ossia che oggi la madre farà o solo il primo, o solo il secondo, e se, venuta l'ora di pranzo, si troverà dinnanzi il primo, non si troverà dinnanzi anche il secondo, e viceversa.

Risulta perciò, vera *a priori* la proposizione “((p o q) e p) → non q”, con “o” inteso in senso **esclusivo**.
Costruiamo la tavola di verità per la proposizione “((p o q) e p) → non q” e verifichiamo che le cose stiano veramente a questa maniera.

p	**q**	**p o q**	**(p o q) e p**	**non q**	**((p o q) e p) → non q**
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

La verifica è positiva: per ogni valore di verità della proposizione p e della proposizione q, l’implicazione ((p o q) e p) → non q, risulta sempre vera.
Nei termini degli Stoici questa implicazione è enunciata a questa maniera: *O il primo o il secondo, ma il primo, allora non il secondo*.
Riporto gli schemi inferenziali (o ragionamenti) di questo tipo individuati dagli Stoici (si noti che la disgiunzione è sempre intesa in senso esclusivo).

1) **Se il primo, il secondo, ma il primo, allora il secondo**
2) **Se il primo, il secondo, ma non il secondo, allora non il primo**
3) **O il primo, o il secondo, ma il primo, allora non il secondo**
4) **O il primo, o il secondo, ma non il secondo, allora il primo**
5) **Non il primo e il secondo, ma il primo, allora non il secondo**

Esposizione dettagliata.

La logica stoica, a differenza di quella aristotelica, è una logica proposizionale e non predicativa.
Distinzione fra proposizioni **atomiche** e **molecolari**, posta in tal senso (la terminologia è retrospettiva – Logistica, ventesimo secolo): proposizioni molecolari sono quelle risultanti per composizione a mezzo dei connettivi logici (*e - o - se…allora… - non*[1]) dalle proposizioni atomiche, ossia il rapporto fra molecolari e atomiche è quello fra il tutto e le sue parti.
I connettivi logici sono detti “costanti logiche”, di contro le proposizioni, le quali non sono ulteriormente scomposte ma prese *in toto*, come blocco unitario, sono dette “variabili” e simboleggiate con lettere la cui distinzione o meno sta a significare la distinzione o meno fra le proposizioni da esse rappresentate – di qui la **distinzione fra logica predicativa** (che distingue entro la proposizione in soggetto e predicato) **e logica proposizionale**, che assume la proposizione come un tutto indistinto.
Se la verità o falsità delle proposizioni atomiche può essere stabilita unicamente appellandosi al mondo reale (per sapere se “Giovanni è fuori casa per una settimana” è vera, devo andare a casa di Giovanni e vedere se non c’è), il valore di verità delle proposizioni molecolari può essere **calcolato**.
Calcolo proposizionale
Il calcolo poggia sulle seguenti considerazioni:
1) Ad es., data la molecolare “p e q”, dove “p” e “q” rappresentano due proposizioni distinte (“p” quanto a lettera è diverso da “q”), per ogni componente si danno due casi: o è vera, o è falsa.

[1] Riporto i simboli usualmente utilizzati per i connettivi: Λ (e), ¬ (non), → (implicazione), V (disgiunzione inclusiva).

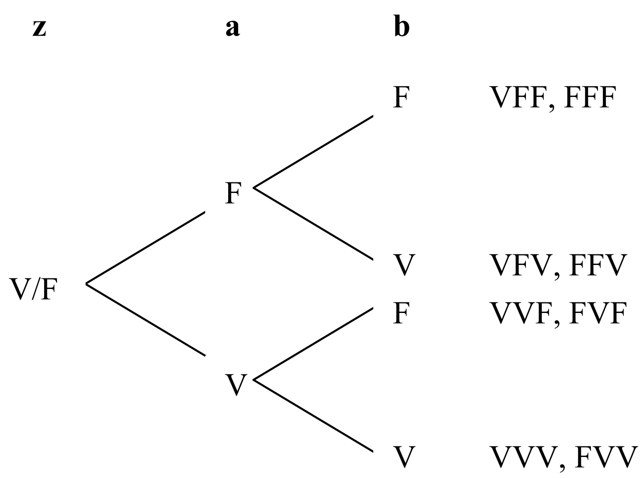
Le combinazioni possibili di valori di verità sono pertanto date a priori, e sono:
V V
F V
V F
F F

2) la molecolare “p e q” è per convenzione sul connettivo “e” stabilita essere vera solamente nel caso che ambedue i componenti (sia p, sia q) siano veri, ossia, se per la 1) i casi possibili sono VV, FV, VF, FF, nel primo caso “p e q” sarà vera, in tutti gli altri sarà falsa. Siamo qui di fronte ad una funzione. In specie: una funzione che fa risultare il valore di verità di una proposizione composta (molecolare) dal valore di verità dei suoi componenti è detta “funzione di verità”.
Ad ogni connettivo corrisponde una funzione di verità, ed esso è la “regola” della connessione.
In questo caso: ad ogni coppia (VV; FV; VF; FF) è associato un valore di verità (V o F) stabilito per una convenzione sul connettivo: è la convenzione sul connettivo che stabilisce la regola di corrispondenza. Ad es.: il connettivo “e”, all’argomento (FV) associa il valore di verità F, il connettivo “o”, associa invece allo stesso argomento il valore di verità V.
Il numero di argomenti richiesti da una funzione di verità dipende dal connettivo: ad es., l’**implicazione** (se….., allora…..), la **disgiunzione** (o) e la **congiunzione** (e) richiedono due argomenti, la **negazione** (non), invece, ne richiede uno soltanto.
Le convenzioni sui connettivi non necessariamente corrispondono al senso usuale nel quale il linguaggio naturale impiega il connettivo in questione.
Ad es., il linguaggio naturale impiega il connettivo “o” non in senso univoco, cioè ora in senso **inclusivo**, ora **esclusivo**: si tratta di fissare l’impiego del termine in uno dei due sensi, o, in alternativa, di produrre due simboli distinti, uno per il senso inclusivo, l’altro per quello esclusivo.
E’ chiaro che, altrimenti, davanti all’argomento VV, non saremmo in grado di decidere se il valore della funzione è V (inclusivo) o F (esclusivo).
Le ridefinizioni logiche dei connettivi talora si allontanano di molto dal senso usuale degli stessi.
E’ in particolare il caso dell’implicazione, che, per convenzione, è posta come falsa unicamente nel caso che l’antecedente sia vera e la conseguente falsa, intesa in “ se p, allora q”, p per “antecedente” e q per “conseguente”. Questo è del tutto anti-intuitivo. Infatti comunemente l’implicazione (se p, allora q) è associata ad un rapporto di causa-effetto fra p e q, ossia è inteso che, posto p, segue q, e non posto p, segue non q. Se io dico: “se fai la tal cosa, ti do mille lire”, l’altro intende: se non faccio la tal cosa, non mi darà le mille lire. Questo non è vero nel caso della definizione logistica dell’implicazione, infatti essa assegna all’argomento FV (con F valore di verità di p e V valore di verità di q) valore di verità V. Per distinguere tale tipo di implicazione dalla conseguenza (l’implicazione nel senso usuale per cui negata l’antecedente è negata anche la conseguente) si suole chiamarla (la prima, l’implicazione logistica) “implicazione materiale o filoniana”.
E’ altresì preferibile, a scanso di fraintendimenti, porre le due premesse come assolutamente slegate, di modo da evitare ogni possibile riferimento ad un rapporto di causa-effetto: ad es., è preferibile esemplificare con “Se due più due fa quattro, allora a Milano piove.”, piuttosto che “Se piove, prendo l’ombrello”.
Un connettivo logico altro non è, quindi, che una particolare regola di connessione (posta ad arbitrio, giacché ogni regola è quella che è, ma avrebbe potuto essere altrimenti) fra il valore di verità di una proposizione molecolare e il valore di verità dei suoi componenti. Se “p e q”, con p e q proposizioni qualsiasi, è la proposizione molecolare di cui vogliamo stabilire il valore di verità, conveniamo di scriverla nella forma “f-congiunzione (p, q)”, dove “p” e “q” rappresentano i valori di verità rispettivamente delle proposizioni p e q (coppie VV, FV, VF, FF), e dove la regola di associazione fra tali coppie e il valore di verità della proposizione molecolare “p e q” (il valore di f-congiunzione per gli argomenti p e q) è rappresentato dal connettivo “e”. Avremo pertanto f-congiunzione (V,V) = V; f-congiunzione (F,V) = F, etc. Parimenti, data la proposizione molecolare “non q” avremo la funzione ad un argomento f-negazione (q), etc.

Le funzioni di verità associate ai connettivi sono le seguenti (il connettivo “o” è inteso qui in senso inclusivo).

a	**b**	**a e b**	**a → b**	**a o b**	**non a**	**non b**
V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	V

E’ poi evidente questo: in una proposizione molecolare del tipo “p e q” può essere che p e q siano ambedue a loro volta proposizioni molecolari, ad es. che sia p = “non z” e q = “a e b”.
Possiamo pertanto scrivere “p e q” come “ (non z) e (a e b)”. Abbiamo qui funzioni di funzioni di verità a partire dalle proposizioni atomiche z, a e b. In particolare 1) il valore di verità di p è funzione di verità avente per argomento il valore di verità di z, funzione che scriveremo come “f-negazione (z)” (vedi sopra); 2) il valore di verità di q è funzione del valore di verità di a e del valore di verità di b, ossia è f-congiunzione (a,b); dalla 1 e dalla 2 combinate: 3) il valore di verità di “p e q” è dato dalla funzione f-congiunzione (f-negazione (z), f-congiunzione (a,b)).
Ora, il tutto può essere così rappresentato:
Proposizione: **(non z) e (a e b).**
Possibili combinazioni dei valori di verità di z, a, b:



z	**a**	**b**	**non z**	**a e b**	**(non z) e (a e b)**
V	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F
V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V

Tautologie

Comunemente è detta "tautologia" (letteralmente, dal greco: "dire la stessa cosa") una proposizione che esplicita nel predicato ciò che è già contenuto, implicitamente, nel concetto del soggetto, ad esempio "il triangolo è una figura piana con tre angoli" o "Giovanni è Giovanni". Ogni tautologia non aumenta di nulla la nostra conoscenza (se conosco la definizione di "triangolo", so già che un triangolo ha tre angoli, etc.): in questo senso l'accezione "tautologico" è un'accezione negativa.
La Logistica definisce "tautologie" tutte quelle proposizioni molecolari (o, meglio: tutte quelle forme proposizionali) che risultano sempre vere per ogni possibile valore di verità delle proposizioni atomiche dalle quali risultano composte.
Esempio:
non (a e non a)

Costruiamo la relativa tavola di verità e verifichiamo la proposizione "non (a e non a)" essere una tautologia.

a	non a	a e non a	non (a e non a)
V	F	F	V
F	V	F	V

La proposizione in questione (che coincide col principio di non contraddizione) è sempre vera per ogni valore della proposizione a, ossia è una tautologia.
Esistono tautologie in forma di implicazione e che, come tali, sono dei ragionamenti.
Alcune di queste forme proposizionali sono state individuate dagli Stoici. Esse sono, ad esempio, con "primo" e "secondo" due proposizioni qualsiasi (riporto le forme proposizionali secondo la scrittura stoica) – si noti che nella 3 e nella 4 la disgiunzione è in senso **esclusivo**:

1) **Se il primo, il secondo, ma il primo, allora il secondo**
2) **Se il primo, il secondo, ma non il secondo, allora non il primo**
3) **O il primo, o il secondo, ma il primo, allora non il secondo**
4) **O il primo, o il secondo, ma non il secondo, allora il primo**
5) **Non il primo e il secondo, ma il primo, allora non il secondo**

Esse valgono a dire:

1) ((p → q) e p) → q
2) ((p → q) e non q) → non p
3) ((p o q) e p) → non q
4) ((p o q) e non q) → p
5) (non (p e q)) e p → non q